MÉTHODOLOGIE III CORRECTION

SÉRIES.

L'objectif de ce travail est de passer en revue l'ensemble des méthodes qui permettent d'étudier la convergence des séries.

Soit donc $\sum u_n$ une série. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n}$ la suite des sommes partielles.

Exercice 1.- ***Préliminaires.***
Réécrire la fiche-méthode suivante en conservant les parties **en gras**, en effaçant le reste puis en complétant par les parties du cours, des exercices et du TD appropriées.

Partie I : méthodes dérivées de l'étude des suites.

Méthode 0 : La série ne peut pas converger si son terme général ne tend pas vers 0.

Méthode 1 : Étudier directement la suite $(\mathbf{S_n})_\mathbf{n}$.

Rappeler ce qu'est une série télescopique et comment exprimer S_n dans ce cas.

Exprimer S_n dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Dans quels cas y a-t-il convergence/divergence de la série ?

Rappeler les formules pour la somme des séries géométriques dérivées.

Qu'est-ce que la série exponentielle ?

Méthode 2 : Reconnaître une série "de référence".

En plus des séries précédentes, il y a une autre famille de séries de référence : les séries de Riemann.

Rappeler dans quels cas convergent les séries de Riemann.

Partie II : méthodes pour étudier les séries à termes positifs et pour prouver l'absolue convergence des séries quelconques.

Méthode 3 : Majorer le terme général par le terme général d'une série de référence.

Citer le résultat du cours qui donne la convergence de la série majorée.

Méthode 4 : Obtenir un équivalent du terme général.

Qu'en déduit on sur les séries ?

Méthode 5 : Appliquer la règle du $\mathbf{n^\alpha u_n}$.

Rappeler la mise en œuvre de cette règle.

Méthode 6 : Comparer la série à une intégrale.

Quel résultat du cours utilise-t-on ?

Partie III : méthodes pour prouver la simple convergence.

Méthode 7 : Utiliser le théorème des séries alternées.

Rappeler le résultat (voir feuille d'exercices).

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Correction 1.-
C'est du cours.

Exercice 2.- *Applications.*
Montrer la convergence ou la divergence des séries suivantes (on donne le terme général). Préciser la méthode utilisée dans chacun des cas.

1. $u_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
2. $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$.
3. $u_n = \frac{\ln\left(1+n^\beta x^n\right)}{n^\alpha}$ pour $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
4. $u_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n^\beta}$ avec $\beta > 0$.
5. $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ (difficile).
6. $u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ (calculer la somme).
7. $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ (calculer la somme).

Attention, tous les cas présentés ici sont assez difficiles.

Correction 2.- **1.** On a déjà traité cet exemple en exercice. La méthode **5.** s'applique très bien.

2. On veut appliquer la méthode **7**. On a

$$|u_n| = \frac{\ln n}{n - \ln n}.$$

Il s'agit de montrer que la suite $|u_n|$ est décroissante pour pouvoir appliquer le critère des séries alternées. Pour cela, on montre que la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\ln t}{t - \ln t}$$

est décroissante. Or on a facilement

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{(t - \ln t)^2}$$

qui est négatif dès que $t \geqslant e$.

3. Il faut méticuleusement séparer les différents cas.

- Si $x = 1$. Dans ce cas, $1 + n^\beta x^n = 1 + n^\beta \underset{n\to\infty}{\sim} n^\beta$. Donc

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\beta \ln n}{n^\alpha}.$$

Cette dernière suite est le terme général d'une série divergente (série divergente de référence, c'est une série de Bertrand).

- Si $x < 1$, alors $n^\beta x^n$ tend vers 0 par croissances comparées et on a

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^\beta x^n}{n^\alpha} = \frac{x^n}{n^{\alpha-\beta}}$$

Cette dernière suite est le terme général d'une série convergente. En effet, par la méthode **5.**, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \frac{x^n}{n^{\alpha-\beta}}\right) = 0$$

par croissance comparées. Ensuite la série de terme général u_n qui lui est équivalente converge aussi (méthode **4.**).

- Si enfin $x > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} 1 + n^\beta x^n = +\infty$ par croissances comparées et

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln\left(n^\beta x^n\right)}{n^\alpha} = \frac{\beta \ln n}{n^\alpha} + \frac{n \ln x}{n^\alpha} = \frac{\beta \ln n}{n^\alpha} + \frac{\ln x}{n^{\alpha-1}}.$$

Les deux nombres $\frac{\beta \ln n}{n^\alpha}$ et $\frac{\ln x}{n^{\alpha-1}}$ sont positifs de sorte que la série converge si et seulement si chacune des deux séries de termes généraux $\frac{\beta \ln n}{n^\alpha}$ et $\frac{\ln x}{n^{\alpha-1}}$ convergent. La première converge pour $\alpha > 1$ et la seconde pour $\alpha > 2$. On en conclut donc que la série converge si et seulement si $\alpha > 2$.

4. Méthode **5.** sans hésiter. On regarde donc la quantité

$$n^\alpha u_n = n^\alpha \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n^\beta}$$

puis

$$\ln\left(n^\alpha u_n\right) = \alpha \ln n + n^\beta \ln\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \alpha \ln n + n^\beta \ln \ln n - n^\beta \ln n \underset{n\to\infty}{\sim} -n^\beta \ln n.$$

On arrive à la conclusion que (pour tout α), $\lim_{n\to\infty} \ln\left(n^\alpha u_n\right) = -\infty$ donc que $\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$. En prenant par exemple $\alpha = 2$, on trouve que

$$u_n = \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}} \left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis donc la série converge.

5. L'intégrale n'existe que si $\alpha > 1$, d'où l'hypothèse. D'autre part

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{t}{n}\right)^\alpha + 1}.$$

On fait le changement de variables $u = \frac{t}{n}$ pour lequel les bornes ne changent pas et $dt = ndu$. On obtient

$$u_n = \frac{n}{n^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha + 1} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha + 1}$$

L'intégrale converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha+1}$ est une constante que l'on note A dans la suite. On a donc montré que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{A}{n^{\alpha-1}}$$

et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$ (on a un équivalent à une série de référence).

6. Il faut faire apparaître des sommes télescopiques. Or on a

$$u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \ln n - \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+1)$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} \left(\ln k - \ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k+1)\right) = \ln 1 - \ln(N+1) - \ln(N+2) - \ln 2$$

qui converge donc vers $-\ln 2$ lorsque N tend vers $+\infty$.

7. Encore la méthode **1.** avec des sommes télescopiques. On a (en multipliant par la quantité conjuguée),

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \\
&= \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^2(n+1)-(n+1)^2n} \\
&= \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^3+n^2-n(n^2+2n+1)} \\
&= \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^3+n^2-n^3-2n^2-n^2} \\
&= \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{-n^2-n} \\
&= \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{-n(n+1)} \\
&= -\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}+\frac{\sqrt{n}}{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

On voit enfin la somme télescopique apparaître et on a

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

et on voit que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} u_k = 1$.

Exercice 3.- ***ESSEC 1990*** *Partie I.* **1.** On considère la fonction définie pour tout réel positif x par

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x).$$

a. Calculer $f'(x)$, étudier f et tracer sa courbe représentative.

b. En déduire successivement que

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{x^2}{2} \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

2. Soit n, k et p des entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

a. À l'aide du théorème des accroissements finis, établir que

$$\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}.$$

b. Déduire des résultats précédents l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

3. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

À cet effet, on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

a. Établir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

b. En déduire le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et prouver qu'elles sont adjacentes.

4. On note γ la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour évaluer numériquement γ, on se propose d'étudier la moyenne arithmétique m_n de u_n et v_n :

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a. Prouver l'inégalité suivante :

$$|m_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

b. Écrire en Python un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné. Préciser en particulier m_5 et m_{50} et en déduire des valeurs approchées de γ à 0,1 et 0,01 près. Que constate-t-on a posteriori sur la qualité de l'approximation réalisée par m_5

5. On améliore dans cette question la majoration obtenue pour $|m_n - \gamma|$ à l'aide de l'ensemble des résultats précédents.

a. Comparer $f\left(\frac{1}{k}\right)$ et $m_{k+1} - m_k$

b. Déduire de l'inégalité de la question **2.b.** que, si n et p sont deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant 2$, alors on a

$$0 \leqslant m_{n+p} - m_n \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Quel encadrement de γ en déduit-on en faisant tendre p vers l'infini ?

À l'aide de la valeur de m_{50} calculée à la question **5.**, quel encadrement de γ obtient-on finalement ?

Correction 3.- **1.** **a.** On a

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2(1+x)-2x}{4(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)^2}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{2(1+x)}{2(1+x)^2} = \frac{x^2}{2(1+x)^2}.$$

Puisque x est positif, on voit que f est croissante. Par ailleurs, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ par croissances comparées. On en déduit l'allure de la courbe.

b. Pour $x > 0$, on a $1 + x \geqslant 1$ et donc $(1+x)^2 \geqslant 1$, puis

$$f'(x) = \frac{x^2}{2(1+x)^2} \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

Intégrons maintenant cette inégalité :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt \leqslant \int_0^x \frac{t^2}{2}dt = \frac{x^3}{6}.$$

2. **a.** On introduit la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2x^2}$ pour $x > 0$. On a $g'(x) = -\frac{1}{x^3}$. La fonction g' est donc croissante et atteint son maximum sur l'intervalle $[k-1, k]$ en k. Ainsi pour $x \in [k-1, k]$, on a $g'(x) \leqslant -\frac{1}{k^3}$. Par le théorème des accroissements finis, on a donc

$$g(k) - g(k-1) \leqslant -\frac{1}{k^3}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k-1)^2} \leqslant -\frac{1}{k^3}$$

ou encore

$$\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}.$$

b. Il s'agit de combiner les deux inégalités précédentes. On utilise donc successivement

$$f\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{6k^3} \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}\right) = \frac{1}{12(k-1)^2} - \frac{1}{12k^2}$$

La somme fait maintenant apparaître une somme télescopique :

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1}\left(\frac{1}{12(k-1)^2} - \frac{1}{12k^2}\right) = \frac{1}{12(n-1)^2} - \frac{1}{12(n+p-1)^2}$$

Or pour tout p et tout n, on a

$$\frac{1}{12(n+p-1)^2} \geqslant 0$$

donc

$$-\frac{1}{12(n+p-1)^2} \leqslant 0$$

et on obtient finalement la majoration

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

3. a. On sait que $\ln(1+x) \leqslant x$ et cette inégalité est valable pour tout $x > -1$. [1] On applique deux fois cette inégalité, d'une part à $\frac{1}{n}$ et à $\frac{-1}{n+1}$ tous deux supérieurs à -1. Dans le premier cas, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Mais $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$. On obtient ainsi la deuxième inégalité de l'énoncé. Pour la première, on a donc

$$\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{-1}{n+1}.$$

Et $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln n - \ln(n+1)$. On obtient donc

$$\ln n - \ln(n+1) \leqslant -\frac{1}{n+1}.$$

En multipliant par -1, il vient

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n,$$

ce qu'on voulait.

b. On a donc, pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \ln n \leqslant 0,$$

d'après la première inégalité de la question précédente. Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) - \ln n \geqslant 0,$$

d'après la seconde inégalité de la question précédente. Ceci montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Puis $v_n - u_n = -\frac{1}{n}$ qui tend vers 0. Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1. Pour montrer cette inégalité, on regarde la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x) - x$. La dérivée vaut $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$. On en déduit que f est croissante sur $[-1,0]$ puis décroissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi, f atteint sa valeur maximale en 0 et $f(0) = 0$, de sorte que f est toujours négative puis donc que $\ln(1+x) \leqslant x$

4. a. On a déjà

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + v_n - \frac{1}{n}}{2} = u_n - \frac{1}{2n}.$$

Donc

$$m_n - \gamma = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}.$$

Puis on utilise le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers γ, on sait que $u_n - \gamma \geqslant 0$. Ainsi

$$m_n - \gamma \geqslant -\frac{1}{2n}.$$

On exprime maintenant m_n en fonction de v_n, de la même manière :

$$m_n = v_n + \frac{1}{2n}.$$

Puis, en utilisant le fait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers γ (donc $v_n - \gamma \leqslant 0$), on obtient

$$m_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2n}$$

En combinant ces deux inégalités, on montre bien que

$$|m_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

b.

```
def u(n):
  result=1;
  for i in range (2,n+1) :
    result=result+1/i
  return result


def v(n):
  return u(n)-1/n


def m(n):
  result = (u(n)+v(n))/2;
  return result
  print(result);

m(5):
m(50):
```

D'après l'inégalité précédente, on sait que $|m_5 - \gamma| \leqslant \frac{1}{10} = 0,1$ donc m_5 est une valeur approchée de γ à 0,1 près.

De même $|m_{50} - \gamma| \leqslant 0,01$ donc m_{50} est une valeur approchée de γ à 0,01 près.

5. a. On a

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k\left(1+\frac{1}{k}\right)} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2\left(k+1\right)} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} m_{k+1}-m_k &= \frac{u_{k+1}+v_{k+1}-u_k-v_k}{2} \\ &= \frac{u_{k+1}+u_{k+1}-\frac{1}{k+1}-u_k-u_k-\frac{1}{k}}{2} \\ &= \frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}+u_{k+1}-u_k \\ &= \frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{k+1}-\ln(k+1)+\ln k \\ &= \frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)}-\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

b. On a donc d'après ce qui précède, puisque $f\left(\frac{1}{k}\right)=m_{k+1}-m_k$,

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=n}^{n+p-1}(m_{k+1}-m_k)=m_{n+p}-m_n.$$

Mais on sait par ailleurs que

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right)\leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}$$

D'où

$$m_{n+p}-m_n\leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Comme $f\left(\frac{1}{k}\right)$ est positif on obtient bien

$$0\leqslant m_{n+p}-m_n\leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

On fait maintenant tendre p vers l'infini. La suite $(m_{n+p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et converge donc vers la même limite γ. Ainsi

$$0\leqslant \gamma-m_n\leqslant \frac{1}{12(n-1)^2}$$

Avec $n=50$, on a

$$0\leqslant \gamma-m_n\leqslant \frac{1}{12\times 49^2}=\frac{1}{28812},$$

qui est bien meilleure que l'approximation précédente à 0,01 près.